

1	1	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
0	0	0	1	1

Рис. 13.

признак, приспособленный для нужного деления образцов на классы.

Для предъявленного к распознаванию объекта по заданному тесту можно получить строчку значений признаков, входящих в тест. Эта строчка может совпадать с какой-либо из строчек таблицы образцов с вычеркнутыми, исключая столбцы теста, столбцами. Если совпадение произошло с какой-либо из первых n_1 строчек, то (по данному тесту) объект относим к первому образцу, если с какой-либо из оставшихся n_2 строчек - ко второму. Разные тесты могут относить один и тот же объект к разным образцам. В самом простом варианте тестового подхода объект относится к тому из образов, к которому его относит большинство тестов.

Отметим, что тестовый и структурно-лингвистический подходы к распознаванию образов прямо базируются на некоторых разделах дискретной математики. Отметим также, что тестовый подход к распознаванию возник в нашей стране и основные работы в рамках этого подхода выполнены советскими исследователями.

В целом, однако, исследования по распознаванию образов продвинуты еще недостаточно. Алгоритмы распознавания, построенные на основе описанных подходов, удовлетворительно работают лишь в специальных условиях и при многих существенных ограничениях. В этом смысле ЭВМ далека еще от универсальности, надежности и эффективности, например, человека при решении многих задач распознавания.

П. Моделирование на однородных структурах.

Первоначально однородные структуры возникли в связи с мо-

делированием явления самовоспроизведения живых существ. Однако, затем выяснилось, что они, с одной стороны, интересны как математический объект, безотносительно к непосредственным приложениям, с другой - как удобный аппарат, в рамках которого можно строить модели разных процессов и явлений, в том числе, и биологических. В литературе однородные структуры или близкие к ним понятия встречаются также под названиями сотообразных структур, клеточных автоматов и др.

Вопросов теории однородных структур мы здесь касаться не будем (в книге [4], например, этому посвящена отдельная глава). Сначала рассмотрим моделирование самовоспроизведения, затем - моделирование распространения возбуждения по сердечной мышце и роста микроорганизмов в замкнутом объеме. Конструкции, возникающие в последних двух моделях, не являются, строго говоря, однородными структурами, но близки к ним.

1. Моделирование самовоспроизведения.

Одно из основных свойств, характерных для живых существ - способность к самовоспроизведению. Естественно, что уже на первых шагах развития математического моделирования в биологии были предприняты попытки отразить это свойство в моделях. Не все из этих моделей можно назвать не то, чтобы математическими, но и вообще сколько-нибудь формальными. Вот некоторые из таких попыток.

Представим себе игрушечную железную дорогу [13]. По ней могут курсировать вагончики трех типов - обозначим их через A , B и C . Из них можно делать трехвагонные составы, отличающиеся порядком вагонов, скажем, ABC и CBA . На дороге имеются запасные пути, на которых стоят резервные вагончики всех трех типов.

Вагончики устроены таким образом, что проходя друг около друга (или сталкиваясь) могут, с помощью специальных захватов, соединяться или отсоединять друг друга от остальной части состава. Если теперь запустить на дорогу поезд состава

ABC , то, в результате, соединений и захватов с запасных путей, через некоторое время на дороге будут курсировать уже два поезда состава ABC . Если же на дорогу запустить поезд состава CBA , то второй появляющийся поезд будет тоже состава CBA . В этом и состоит

самовоспроизведение в этой модели.

Другая модель [13, 15] представляла собой ящик, в который были насыпаны детали двух сортов, которые обозначим через A и B . Детали имели крючочки и захваты, которые позволяли им соединяться друг с другом, причем двумя способами. При первом из них получалась конструкция, которую мы обозначим через AB , при втором - через BA . Самовоспроизведение здесь состояло в следующем. Если ящик с деталями встряхивать, то в нем ничего не происходит. Однако, если среди деталей есть пара, соединенная в конструкции AB , то при встряхивании в ящике начинают возникать (через посредство захватов и соединений) новые пары AB . Первая пара AB при этом служила как бы "затравкой", или "катализатором". Если же в качестве "затравки" в ящике находилась пара BA , то при встряхивании возникли именно пары BA .

Эти модели по-своему остроумны, однако, конечно же, далеки от реального самовоспроизведения живых существ, которое, все-таки, в первую очередь и интересно. Более приемлемыми представляются попытки рассматривать самовоспроизведение как самовоспроизведение автоматов. Здесь, однако, возникали свои трудности. Сначала были попытки описать такое устройство или механизм, который в процессе своей деятельности копировал бы, воспроизводил себя. Однако, в такой постановке задача плохо поддавалась формализации и исследованию аналитическими методами. Именно тогда и возникла идея однородных структур.

Опишем однородную структуру оперущим образом. Пусть дана плоскость (бесконечная) разделенная прямыми линиями на квадратные ячейки одинаковых размеров. В каждую ячейку помещаем конечный автомат с двумя состояниями, одно из которых трактуется как состояние покоя, другое - как состояние возбуждения. Для ячейки (с автоматом в ней) определяется понятие ее соседей. В нашем случае будем считать соседями данной ячейки все те ячейки, которые имеют с данной общую границу. Эта граница может быть как отрезком прямой, так и точкой. Для примера у ячейки A на рис. 14 ее соседями будут все заштрихованные ячейки. Время считаем дискретным и полагаем существующей последовательность заномерованных моментов

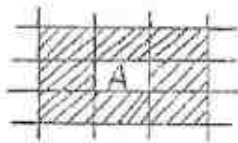


Рис. 14.

времени: нулевого, первого, второго и т.д. Постулируется, что состояние ячейки в $k+1$ момент времени ($k=0,1,2,\dots$) зависит только от состояния этой же ячейки в k -й момент времени и от состояния ячеек-соседей в k -й момент времени. Характер этой зависимости - один и тот же всех ячеек однородной структуры (именно поэтому она и была названа однородной структурой). Записать это можно так. Если $q_i(t)$ - состояние ячейки с номером i в момент времени t , ячейки с номерами $c_1, c_2, \dots, c_n$ - ее соседи, то тогда

$q_i(t+1) = \Psi(q_i(t), q_{c_1}(t), \dots, q_{c_n}(t))$ - где Ψ некоторая функция, фиксированная для данной однородной структуры. Кроме того требуется, чтобы ячейки, находящиеся в состоянии покоя в момент времени t , и окруженные соседями, тоже покоящимися, в следующий момент времени оставались в состоянии покоя (запрет на "самовозбуждение").

В начальный момент времени ($t=0$) все ячейки, за исключением лишь конечного их числа, находятся в состоянии покоя. Отсюда следует, что в любой последующий момент времени $t > 0$ лишь конечное число ячеек будет в состоянии, отличном от состояния покоя.

Выделим часть плоскости по линиям, разделяющим ячейки, так, например, как это сделано на рис. 15. Такая выделенная часть называется блоком. Чаще всего рассматриваются прямоугольные или даже квадратные блоки, хотя в некоторых случаях используются блоки и более сложной формы.

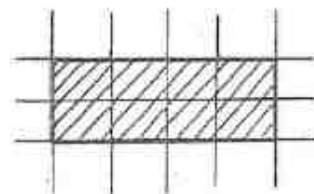


Рис. 15.

Конкретное распределение "возбуждений" и "покоя" по ячейкам блока называется его конфигурацией. В тех случаях, когда это не будет вызывать неясностей, мы будем и блок, и конфигурацию блока обозначать одной и той же буквой.

Будем говорить, что конфигурация C является копией конфигурации C' , если существует перенос плоскости (без вращений), переводящий блок C в блок C' так, что каждая ячейка блока C имеет то же состояние, что и соответствующая ячейка

в блоке C' .

Конфигурация C^* содержит n копий конфигурации C , если у блока C^* существует n непересекающихся подмножеств таких, что их конфигурации являются копиями конфигурации C .

Пусть блок C на однородной структуре в момент времени $t=0$ включает в себя все ячейки, находящиеся в возбужденном состоянии. Соответствующую конфигурацию C будем называть начальной конфигурацией.

Пусть дана конфигурация C . Примем ее копию за начальную на однородной структуре. Обозначим через C_T блок, содержащий все возбужденные ячейки в момент T . Будем говорить, что конфигурация C способна произвести n потомков за время T , если можно указать такое время $T' < T$, что в конфигурации $C_{T'}$ содержится по крайней мере n копий конфигурации C .

Назовем конфигурацию самовоспроизводящейся, если для каждого целого положительного n существует T такое, что эта конфигурация способна воспроизвести n потомков за время T .

Нетрудно привести тривиальный пример самовоспроизводящейся конфигурации. Пусть ячейка однородной структуры переходит в состояние возбуждения, если в ее окрестности есть хотя бы одна возбужденная ячейка. Нетрудно видеть, что, в этом случае, конфигурация, состоящая из единственной возбужденной ячейки является самовоспроизводящейся.

Известно, что при некоторых условиях на окружающую среду, рост числа живых организмов идет, как предполагается, по экспоненте. Интересно, что на однородных структурах такого роста числа конфигураций получить нельзя. Это определяется следующей теоремой.

Теорема [13]. Если C - конфигурация, способная воспроизвести $f(T)$ потомков за время T , то существует такое действительное положительное число k , что $f(T) < kT^2$.

Доказательство. Пусть C - самовоспроизводящаяся конфигурация и пусть наименьший квадратный блок, который может вместить конфигурацию C , имеет размеры $D \times D$. Тогда в каждый момент времени число ячеек, находящихся в возбужденном состоянии, не будет превышать величины $(2T+D)^2$. Если

2 - число ячеек в конфигурации C , то $f(T) \leq (2(T-1)+D)^2$.

. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Из уже сказанного про однородную структуру видна особая роль начального момента времени, т.е. $D=0$. Это единственный момент времени, когда на однородной структуре может присутствовать любая конфигурация - просто в силу того, что мы ее туда в этот момент помещаем. Далее конфигурация начинает меняться уже независимо от нас.

Оказывается, что при некоторых условиях на однородную структуру, есть конфигурации, которые могут существовать только в начальный момент времени. Такая конфигурация неустойчива, т.е. уже в следующий момент времени она, изменяясь, остановится отличной от исходной. Мало того, эта конфигурация еще и не конструируема в том смысле, что не существует такой конфигурации, задав которую в момент времени $(T-1)$, можно было бы из нее получить данную конфигурацию в следующий момент времени T .

Такие конфигурации получили название конфигураций райского сада, по аналогии с библейским райским садом, который, как предполагается, существовал в некоторый начальный момент, исчез и никогда не возникнет в будущем.

Так как конфигурация райского сада не может быть получена на однородной структуре в результате изменения некоторой конфигурации, то, следовательно, никакая самовоспроизводящаяся конфигурация не может содержать (как часть), конфигурацию райского сада. Этим обстоятельством конфигурации райского сада связаны с проблемой самовоспроизведения конфигураций.

Условия, при которых существуют конфигурации райского сада, связаны со способностью конфигураций стирать себя. Определим понятие стираемости. На первый взгляд, это сделать несложно. Действительно, пусть на блоке имеется некоторая конфигурация в данный момент. Пусть в следующий момент конфигурация изменилась. Можно считать, что этим исходная конфигурация на блоке "стерта". Однако, при этом возможен такой случай, когда исходная конфигурация как целое только сместилась в некотором направлении и, в общем-то, сохранилась. Такие случаи надо, по-видимому, исключить, так как они не отвечают содержательному пониманию стираемости.

Итак, пусть даны две конфигурации F и F^* . Без ограничения общности их, очевидно, можно считать заданными на квад-

ратных блоках одинаковых размеров (рис. 16).

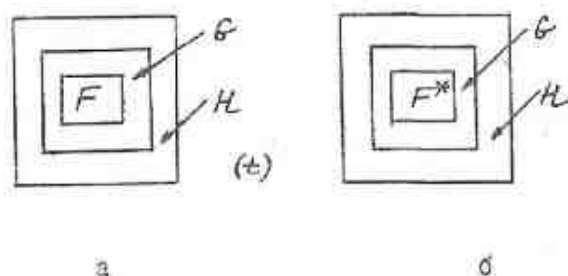


Рис. 16.

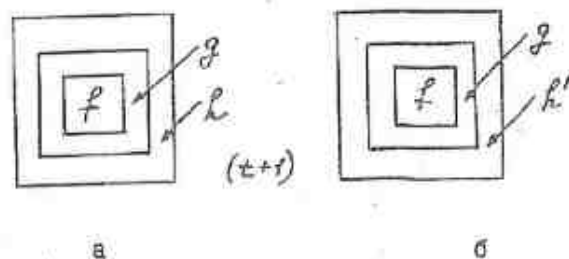


Рис. 17.

Выделим по периметру блоков F и F^* слои клеток толщиной в одну клетку. Конфигурации на получившихся блоках положим одинаковыми и обозначим их через G . Рассмотрим еще один слой клеток, окаймляющих конфигурации G и конфигурацию на этих слоях тоже будем считать одинаковой (H на рис. 16 а и б).

Рисунок 16 (а и б) будем считать изображением конфигураций F и F^* в некоторый момент времени t . Пусть теперь в следующий момент $(t+1)$ F и F^* переходят в одну и ту же конфигурацию f . Конфигурации на блоках, окаймляющих F и F^* , полагаем в момент времени $(t+1)$ тоже одинаковыми (обозначена через g на рис. 17 а и б).

Конфигурации F и F^* , для которых имеет место описанный переход, назовем взаимно стираемыми.

Слой клеток, окаймляющих F и F^* , введены для того, чтобы исключить упомянутое выше стирание за счет сдвигания кон-

фигурации. Роль конфигурации, "охраняющей" F и F^* , выполняет конфигурация G . Для того, чтобы иметь возможность задать конфигурации на первом слое клеток в момент $(t+1)$ тоже одинаковыми, введены вторые слои клеток с одинаковыми конфигурациями на них в момент t . Поскольку для клеток вторых слоев соседними будут клетки, не входящие ни в G , ни в H (т.е. клетки с неизвестными состояниями), то в следующий момент времени $(t+1)$ мы уже не считаем конфигурации на блоках второго слоя заведомо одинаковыми (рис. 17 а и б).

Отношение взаимной стираемости транзитивно, симметрично и рефлексивно, следовательно, это отношение эквивалентности. Множество всех возможных конфигураций может быть разбито на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из конфигураций, либо являющихся копиями друг друга, либо взаимно стираемых.

Назовем конфигурацию C стираемой, если существует другая конфигурация C' такая, что C и C' - взаимно стираемы.

Пусть C - стираемая конфигурация на некотором блоке. Пусть C' - такая конфигурация квадратного блока, что в ней содержится копия конфигурации C и только она (т.е. все возбужденные клетки принадлежат копии конфигурации C). Тогда, очевидно C' - тоже стираемая конфигурация. Это позволяет нам считать, что стираемые конфигурации связаны с квадратными блоками.

Теорема [13]. В однородной структуре, в которой существуют стираемые конфигурации, существуют и конфигурации райского сада.

Доказательство. Пусть n - такое целое положительное число, что в блок размерами $n \times n$ может быть помещена стираемая конфигурация. Две конфигурации размерами $n \times n$ будем считать находящимися в отношении эквивалентности R , если они либо являются копиями друг друга, либо взаимно стираемы. Если каждая ячейка (автомат в ней) имеет A состояний, то число различных возможных конфигураций на блоке размерами $n \times n$ равно, очевидно, A^{n^2} . Так как по условию теоремы есть хотя бы одна пара взаимно стираемых конфигураций, то отношение R порождает на множестве из A^{n^2} конфигураций самое большее $(A^{n^2} - 1)$ классов эквивалентности.

Пусть теперь K — некоторое целое положительное число. Рассмотрим блок размерами $Kn \times Kn$ (будем называть его большим блоком). Это очевидным образом можно считать состоящим из $K \times K$ блоков размерами $n \times n$ (маленькие блоки). Перенумеруем маленькие блоки в естественном порядке: первым будет блок в верхнем левом углу большого блока, вторым — блок находящийся справа от него, и т.д. до конца ряда. Последний блок в верхнем ряду получит номер K . Затем переходим ко второму ряду, первый блок во втором ряду получит номер $(K+1)$, и т.д. Наибольший номер $K \times K$ получит, очевидно, блок в нижнем правом углу.

Рассмотрим теперь две конфигурации C и C' в большом блоке. Заданием C и C' определяются некоторые конфигурации и на маленьких блоках. Будем говорить, что C и C' находятся в отношении R^* , если каждая пара конфигураций на маленьких блоках с одинаковыми номерами находится в отношении R . Это отношение является отношением эквивалентности, а число классов эквивалентности по отношению R^* не более $(A^{n^2}-1)^{K^2}$. Очевидно, что если C и C' находятся в отношении R^* , то они либо копии друг друга, либо взаимно отрицательны.

Итак, если мы рассматриваем в момент времени t блок размерами $Kn \times Kn$, то число возможных конфигураций на нем равно $A^{K^2 n^2}$. Все конфигурации из одного класса эквивалентности по отношению R^* переходят в момент времени $(t+1)$ в одну конфигурацию. Следовательно, максимальное возможное число различных конфигураций на блоке $Kn \times Kn$ в момент времени $t+1$, получающихся из конфигураций на этом же блоке в предшествующий момент, равно $(A^{n^2}-1)^{K^2}$. Число же возможных конфигураций на блоке $Kn \times Kn$ в момент времени $A^{K^2 n^2}$ равно (как и в любой другой момент). Если $(A^{n^2}-1)^{K^2} < A^{K^2 n^2}$ при некотором K , то это означало бы, что число возможных конфигураций на большом блоке в момент времени $t+1$ больше, чем число тех конфигураций, которые могут получиться как результат изменений конфигураций в предшествующий момент. Но это как раз и означало бы, что среди возможных конфигураций есть такие, какие не могут быть получены как следствие изменений какой-либо из конфигураций в предшествующий момент, то есть конфигурации райского сада,

На самом деле, рассматривать в момент времени $t+1$ блок размерами $Kn \times Kn$ и все возможные конфигурации на нем не вполне правильно. Дело в том, что ячейки, находящиеся на границе блока, имеют в качестве соседей ячейки, не принадлежащие блоку. Состояния этих ячеек в момент времени нам не известны, и следовательно мы не можем определить состояния граничных ячеек блока в момент $t+1$. Предыдущими состояниями ячеек блока $Kn \times Kn$ определялись в момент $t+1$ состояния ячеек только блока $(Kn-2) \times (Kn-2)$ (т.е. без граничных ячеек). С учетом этого обстоятельства для доказательства существования конфигураций райского сада надо доказать справедливость неравенства $(A^{n^2}-1)^{K^2} < A^{(Kn-2)^2}$ (2), более сильного, чем записанное ранее неравенство 1).

Покажем, что при заданных $n \geq 1$ и $A \geq 1$ существует целое положительное K , при котором справедливо неравенство (2).

$$\text{Заметим, что } A^{n^2} > A^{n^2} - 1 > 0$$

$$\text{Поэтому } \frac{A^{n^2}}{A^{n^2}-1} > 1$$

Следовательно, можно выбрать такое целое положительное K , что

$$K > \frac{4n}{\log_A \frac{A^{n^2}}{A^{n^2}-1}}$$

Тогда

$$\log_A \frac{A^{n^2}}{A^{n^2}-1} > \frac{4n}{K}$$

Отсюда

$$\log_A \frac{A^{n^2}-1}{A^{n^2}} < -\frac{4n}{K} + \frac{4}{K^2}$$

или

$$\frac{A^{n^2}-1}{A^{n^2}} < A^{(-\frac{4n}{K} + \frac{4}{K^2})}$$

отсюда

$$A^{n^2}-1 < A^{(n^2 - \frac{4n}{K} + \frac{4}{K^2})}$$

Возведем обе части этого неравенства в степень k^2 .

Тогда

$$(A^{n^2}-1)^{k^2} < A^{(k^2 n^2 - 4nk + 4)}$$

или $(A^n-1)^{k^2} < A^{(kn-2)^2}$, что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что однородные структуры (в более общем определении) оказались интересным математическим объектом безотносительно к биологии и вообще к приложениям. Для них был получен ряд интересных математических результатов [12].

Более общее, по сравнению с описанным выше, понятие однородной структуры можно получить следующим образом. Во-первых, естественно перейти от рассмотрения плоскости, поделенной на квадратные ячейки, к n -мерному евклидову пространству, поделенному на n -мерные же ячейки. Далее, автомат, помещаемый в каждую ячейку, можно полагать не таким простым, как это определялось выше, а конечным автоматом общего вида. И, наконец, соседями данной ячейки можно считать не просто ячейки, имеющие с данной общую границу, а ячейки, определяемые так называемым шаблоном соседства, т.е. находящиеся на заданных направлениях и расстояниях от данной ячейки. При этом, разумеется, сохраняются условия однородности: все автоматы в ячейках одинаковы, одинаковы и шаблоны соседства для всех ячеек.

Показано, что в однородной структуре можно моделировать поведение универсальной машины Тьюринга.

2. Некоторые автоматные модели в биологии.

Уже из краткого описания однородной структуры видно, что она удобна для моделирования с ее помощью процессов возбуждения в биологических тканях, распространения волн возбуждения, их взаимодействия и пр. Довольно давно привлекает внимание задача моделирования распространения возбуждений в сердечной мышце. Известно, что сердечная мышца состоит из мышечных элементов, возбуждение на которые, сопровождающееся их сокращением, передается от соседних таких же элементов. Отсюда возбуждения, возникнув в некоторых областях ткани сердца, распространяется затем от элемента к элементу, проходя по всей сер-

дечной мышце. Известны интересные факты о взаимодействии такого рода волн возбуждения, о патологических режимах работы сердечной мышцы, при которых раз возникшее возбуждение не затухает, а циркулирует по сердечной мышце неограниченно долго. Модель [16], которую мы рассмотрим ниже, имитирует некоторые из таких явлений. Конструкция, которая при этом используется, - это, конечно, не однородная структура в строгом смысле, однако, у нее есть много черт сходства с однородной структурой.

Рассмотрим конечный автомат с S входами $(x_1, \dots, x_S)$, одним выходом y и множеством внутренних состояний

$Q = (q_0, q_1, \dots, q_n)$ (S и n - некоторые целые положительные числа). Входной алфавит $A = (0, 1, \dots, n)$, выходной алфавит $B = (0, 1)$. Функция состояний $q(t)$ определена следующим образом.

$$q(t+1) = \varphi(x_1(t), \dots, x_S(t), q(t)) = \varphi(x_1(t), \dots, x_S(t), q_i) = \begin{cases} q_n, & \text{если } \max(x_1(t), \dots, x_S(t)) > i \text{ и } i=0, 1, \dots, n-1 \\ q_{i-1}, & \text{если } \max(x_1(t), \dots, x_S(t)) \leq i \text{ и } i=1, 2, \dots, n \\ q_0, & \text{если } \max(x_1(t), \dots, x_S(t)) = 0 \text{ и } i=0 \end{cases}$$

Выходная функция

$$y(t) = \psi(q(t)) = \psi(q_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=n \\ 0, & \text{если } i \neq n \end{cases}$$

Начальное состояние - q_0 .

Этот автомат будем называть клеткой. Назовем q_n состоянием возбуждения, и для того, чтобы выделить его, введем для него обозначение q^* . Далее назовем q_0 состоянием покоя, а $q_1, \dots, q_{n-1}$ - состояниями рефрактерности. Сигналы, отличные от нуля, на входах автомата условимся называть импульсами. На рис. 18 представлена диаграмма Мура для клетки (через X обозначен $\max(x_1(t), \dots, x_S(t))$).